一様なボーズ凝縮体の不可逆過程(非線型非平衡統計力学研究会報告,基研研究会報告)

田中, 文彦

開してvの一次の項よりzに対する閉じた方程式を作ると

$$1=-\frac{1}{m}\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d u\ \frac{(e+u)^{2(2-\eta)-d}}{u^{2-\eta+z}}\left\{\frac{1}{g(0)}-\frac{1}{g\left(-u^z/(e+u)^z\right)}\right\}, \quad \cdots (13)$$

但し

$$g(v)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\frac{d^d x}{x^{2-\eta}(e+x)^{2-\eta}}\ \frac{x^z-(e+x)^z}{x^z-(e+x)^z+v}\ 。\quad \cdots (14)$$

これを数値的に解けば動的臨界指数zが求まる。m→大として1/mの一次まで展開すると容易にわかるように，すでに知られている結果[3)~6)]

$$z=2-\eta+2\lambda+O(m^{-2}),$$

$$2\lambda=\frac{d\eta}{\varepsilon}\left\{2^{\varepsilon}\theta(d-3)\cos^2(\pi d/2)-1\right\}+O(m^{-2})$$

となる。この方法の輸送係数[7)]への応用は目下研究中である。

参 考 文 献

1) A. J. Bray, Phys. Rev. Lett. **32**, (1974), 1413.
2) S. Ma, Rev. Mod. Phys. **45**, (1973), 589.
3) M. Suzuki and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **52**, (1974), 344.
4) I. Kondor and P. Szépfalusy, Phys. Lett. **47A**, (1974), 393.
5) R. Abe, Prog. Theor. Phys. **52**, (1974), 1135.
6) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **53**, (1974), No. 1
7) M. Suzuki, Phys. Lett. **48A**, (1974), 315.

『一様なボーズ凝縮体の不可逆過程』

東大・理　田 中 文 彦

相互作用するボーズ粒子系の熱的平衡状態に於いて，一様な凝縮体が存在しているとき，そのゆらぎと安定性は，運動量0の一粒子準位に関してゆらぎの演算子を導入する

方法で Glassgold − Sauermann [1]によって調べられたがここではオーダパラメータと凝縮体の占拠数の非平衡状態からの緩和過程を $T>T_\lambda$ で調べる。出発点としては密度行列に関する Liouville方程式を用いるが，ボーズ演算子に関してはコヒーレント表示を用いるのが古典論との類推からも見とおしがよい [2]；

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = Lf \qquad \cdots(1)$$

$$L\equiv -\sum\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\tilde{\varepsilon}_k\alpha_k+\sum_{k',q}\frac{v(q)}{\Omega}\alpha^*_{k'}\,\alpha_{k+q}\,\alpha_{k'-q}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k,k'}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_k\partial\alpha_{k'}}\sum_q\frac{v(q)}{\Omega}\alpha_{k+q}\;\alpha_{k'-q}\quad - c.c.$$

ここで $f(\{\alpha^*\},\{\alpha\}:t)$ は密度行列のコヒーレント状態 $|\{\alpha\}>\equiv\prod_k e^{-\frac{1}{2}|\alpha_k|^2}\sum_{n_k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|n_k>$ での対角要素で分布関数の役割を果たす。($\tilde{\varepsilon}_k\equiv k^2/2m-\mu$, Ω =体積, $v(q)$ = 相互作用, c.c. =複素共役)。

興味があるのは $k=0$ 準位の運動であるから, $k\neq 0$ 準位を消去するために次の射影演算子$\mathscr{P}$を導入する：

$$\mathscr{P}f(x,y\;;t)\equiv t_1(x,y\;;t)=\varphi_{eq}(y\;;\bar{\alpha}_0)\,P(x\;;t) \qquad \cdots(2)$$

$$P(x,t)\equiv\int dy\;\;f(x,y\;;t)$$

但し $\{\alpha_0,\;\alpha_0^*\}\equiv x$, $\{\alpha_k,\;\alpha_k^*\}_{k\neq 0}\equiv y$ と略記した。$\varphi_{eq}(y\;;\bar{\alpha}_0)$ は α_0 が熱平衡値 $\bar{\alpha}_0$ をとったときの $k\neq 0$ 状態の粒子の平衡分布である。特に T_λ の近傍ではオーダパラメータ α_0 に比べて $k\neq 0$ 粒子の運動のタイムスケールは速いからこの定義が妥当であると考えられる。 f_1 の従う一般的な方程式の記憶項を相互作用に関して2次までまで摂動展開を行うと $T>T_\lambda$ で求める最初の式が得られる：

$$i\frac{\partial P}{\partial t}=(\mathscr{L}+\mathscr{L}_1)P(t)+i\int_0^t ds\;\;\mathscr{L}_2(s)\;e^{-is\mathscr{L}_0}P(t-s) \qquad \cdots(3)$$

ここで $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}'$, $\quad\mathscr{L}_0=-\tilde{\varepsilon}_0(\partial_0\alpha_0-c.c.)$,

$$\mathscr{L}'=-v(0)\left(\partial_0|\alpha_0|^2\alpha_0+\partial_0^2\;\alpha_0^2/2\right)-c.c.$$

$$\mathscr{L}_1=-\left(\sum_{k\neq 0}[v(0)+v(k)]<\alpha_k^*\alpha_k>_{eq}\right)(\partial_0\alpha_0-c.c.)$$

$$\mathscr{L}_2(s) = \gamma_1(s)\, \partial_0^{\,*} \partial_0 + \{ \gamma_2(s)\, \partial_0 \alpha_0 + \gamma_3(s)\, \partial_0 (\alpha_0^* + \partial_0/2)\, \partial_0^{\,*}(\alpha_0 + \partial_0^*/2)$$
$$+ \gamma_4(s)\, \partial_0 (\alpha_0^* + \partial_0/2)\, \alpha_0^2 + \text{c.c.} \}$$
$$\gamma_1(s) = \Sigma'\,(v(k_1) + v(k_2))^2 (1+f_1)(1+f_2)\, f_3 \cos(\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_0)\, s \quad \cdots\cdots\cdots$$

で $f_j = (e^{\beta \tilde{\varepsilon} j} - 1)^{-1}$ はボーズ分布函数，$\tilde{\varepsilon}_j \equiv \tilde{\varepsilon}_{k_j}$ $k_3 \equiv k_1 + k_2$ である。和 Σ' は $k_1, k_2, k_3 \neq 0$ の制限の下に行う。∂_0 は $\partial/\partial\alpha_0$ の略記で $\Omega \equiv 1$ とした。方程式 (3) はオーダパラメータの確率分布の運動を記述するが，これを解くためにまず α_0 から作用一角変数 J，ϕ に移行する。($\alpha_0 = \sqrt{J}\, e^{i\phi}$)。$\mathscr{L}_0 = -i\,\mu\partial_\phi$ の固有函数 $f_m = e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$ (m=0，±1 …) で を展開して $P(J.\phi\,;\,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m(J\,;\,t)\, f_m$ と書くと，$p_0(J\,;\,t)$ は凝縮体の占拠数分布函数 $\mathrm{tr}\,[\delta\, a_0^+ a_0 - N_0)\,\rho]$ と Poisson 変換で結ばれている。(3)式を Markov 近似を行うと P の展開から

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(J。t) = [-\frac{\partial}{\partial J} c_1(J) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial J} C_2(J)]\, p_0(J\,,\,t) \qquad \cdots (4)$$

$$c_1(J) = \gamma_1 - 2\gamma_2^1 J\,, \qquad c_2(J) = 2\gamma_1 J$$

$$\gamma_1 \equiv \int_0^\infty ds\ \gamma_1(s)\,, \qquad \gamma_2^1 \equiv \int_0^\infty ds\ \mathrm{Re}\ \gamma_2(s)$$

を得る。(4)式は明確な意味を持っているが，これを見るために，両辺に J をかけて積分すると，一般的関係式 $\int_0^\infty J\, p_0(J\,;\,t)\, dJ = \langle N_0 \rangle_t + 1$ を用いて粒子数の反応方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_0 \rangle_t = - w_{out} \langle N_0 \rangle_t + w_{in} (\langle N_0 \rangle_t + 1) \qquad \cdots (5)$$

$$w_{out} = \gamma_1 = \Sigma' [v(k_1) + v(k_2)]^2 (1+f_1)(1+{}_2)\, f_3\, \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_0)$$
$$w_{in} = \gamma_1 - 2\gamma_2^1 = \Sigma' [v(k_1) + v(k_2)]^2 f_1 f_2 (1+f_3)\, \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_0)$$

で，Born 近似で衝突を取扱ったことに相当している。

(4)式は拡散項が線形の Fokker-Planck 方程式で容易に解が得られる。一般解は Laguerre の多項式 $L_m(x)$ を用いて

$$p_0(J, t) = \Sigma\ c_m\, e^{-\gamma n t}\, L_m(x)\, e^{-x} \qquad \cdots (6)$$

と書かれ，ここで $\gamma \equiv 2\gamma_2^1$，$x \equiv J / \langle J \rangle_{eq}$，$\langle J \rangle_{eq} = \gamma_1 / 2\gamma_2^1$ である。また初期条件 $p_0(x, t=0) = \delta(x - x_0)$ を満たす素解は

$$p_0(x,t\,|\,x_0,0) = \frac{1}{1-e^{-\gamma t}} \exp\left[\frac{x+x_0}{1-e^{\gamma t}}\right] I_0\left(2\sqrt{\frac{xx_0 e^{-\gamma t}}{1-e^{-\gamma t}}}\right) e^{-x} \quad \cdots (7)$$

I_0 は位数0の変形 Bessel 函数である。(7)式から平均値，分散の挙動を調べると

$$\begin{aligned} \langle x\rangle_t &= 1 + (x_0-1)\,e^{-\gamma t} \\ \langle(\delta x)^2\rangle_t &= [\,1+(x_0-1)\,e^{-\gamma t}]\,(1-e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad \cdots (8)$$

となる。最後に臨界緩和は $v(k) = \mathrm{const.} \equiv v$， $\beta\tilde{\varepsilon}_0 = r$ として，$\gamma = Av^2 r$（A は積分で表わされる数値）となり van Hove 理論に一致していることが分る。

参 考 文 献

1) A. E. Glassgold and H. Sauermann, Phys. Rev. **182**, (1969), 262. **188**, (1969), 515.
2) J. S. Langer, Phys. Rev. **184**, (1969), 219.

レーザーにおける instability － undamped spiking － に対する stochastic model

東大・理　　高河原　俊　秀

レーザーの spiking oscillation は，レーザーの誕生と同時に観測され，実験条件により不規則（減衰，非減衰）発振になることが調べられた。ここでは特に非減衰発振（undamped spiking）について，非平衡非線型系における時間領域での対称性の低下（limit cycle の出現）という観点[1]より考察を加える。この現象は，電磁場と物質系との非線型相互作用に起因するが，これをごく簡単に説明すると次のようになる。まず電磁場はレーザー媒質からの自然放出により生じ，誘導放出過程を通じて反転分布を食い尽しつつ成長する。反転分布が減少して光子の供給が各種の損失に打勝てなくなると，電磁場は減衰してゆく。一方反転分布はたえずポンピングにより供給をうけているので，その間に回復し各種の損失に打勝つだけの光子を供給するようになり，再び電